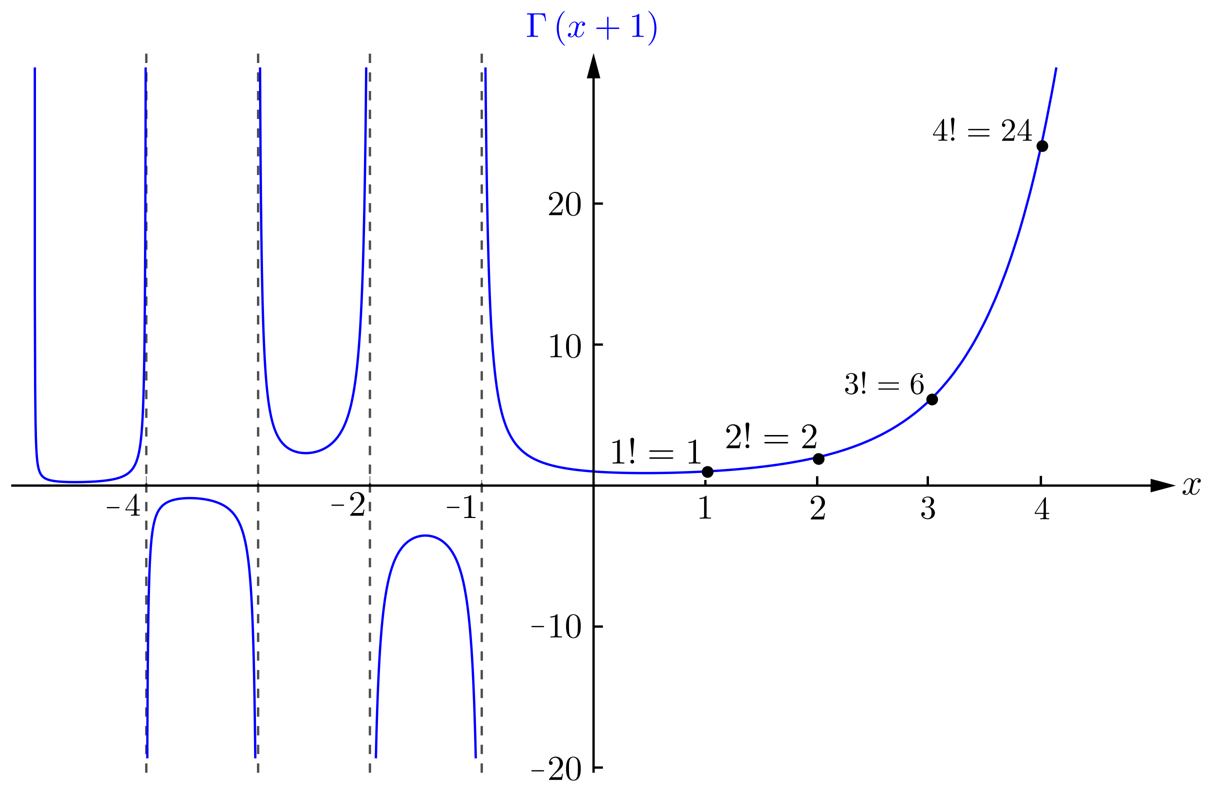
Méth. Mat. Phys. - Chapitre 3

Fonction gamma

EPFL

- **Fonction gamma réelle :** généralisation de $f(n) = n! \, : \, \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{\,x-1} e^{-\,t}\, dt \qquad \text{où} \qquad x = \mathrm{Re}(z) \tag{3.3}$$



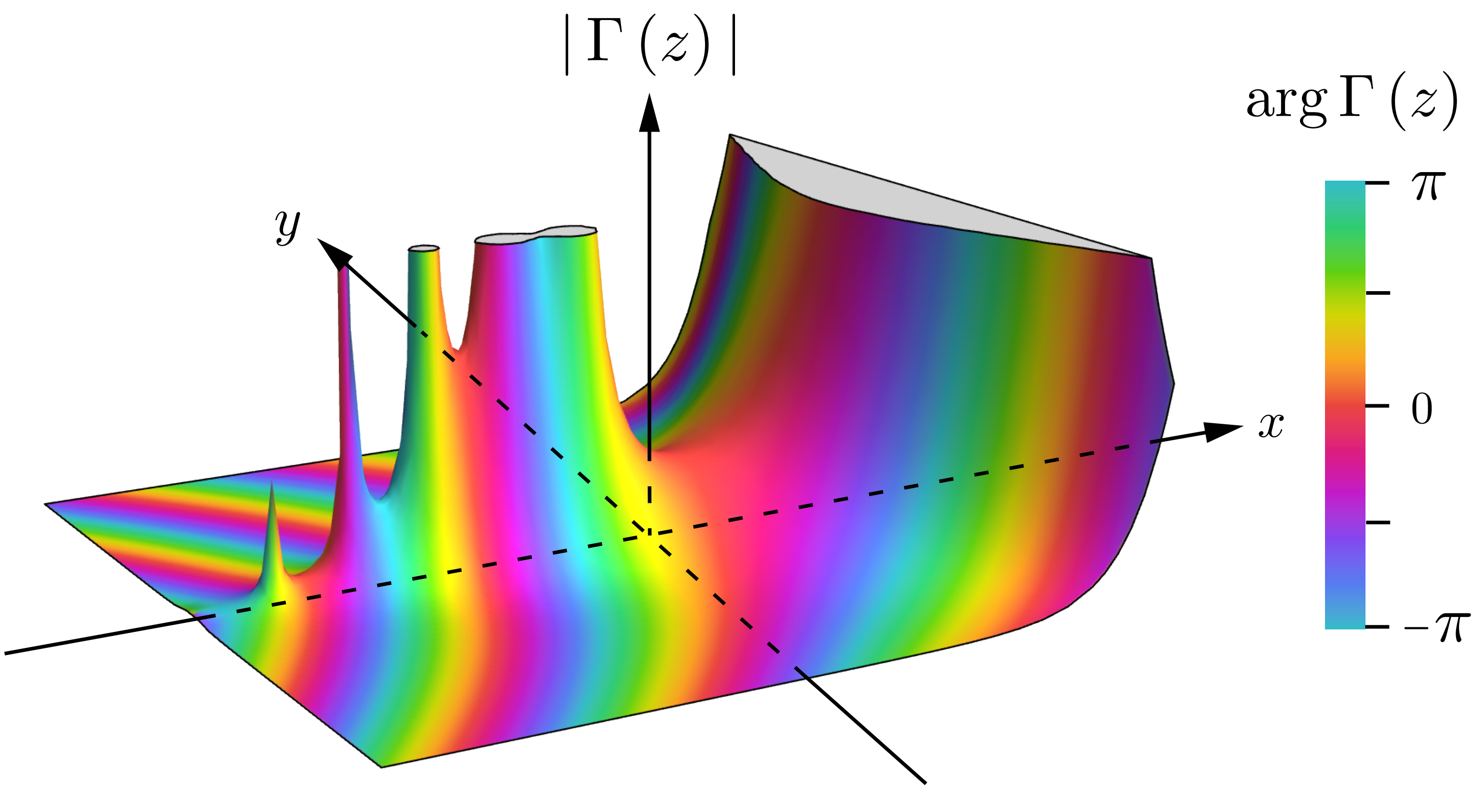
- **Factorielle :** propriété fondamentale

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^{\,n} e^{-\,t}\, dt = n! \tag{3.4}$$

- **Fonction gamma complexe :** généralisation de $f(n) = n! : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{\,z-1}\, e^{-\,t}\, dt \qquad \text{où} \qquad z = x + iy \tag{3.6}$$

$$\Gamma(z) = |\,\Gamma(z)\,|\, e^{\,i \arg \Gamma(z)}$$



- **Relation de récurrence complexe :** intégration par parties

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^{\,z} e^{-\,t}\, dt = \left. -\, t^z e^{-\,t} \right|_0^\infty + \int_0^\infty z\, t^{\,z-1} e^{-\,t}\, dt$$
$$= z \int_0^\infty t^{\,z-1} e^{-\,t}\, dt = z\,\Gamma(z)$$

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z) \tag{3.7}$$

- **Valeur particulière :** $z = 1$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-\,t}\, dt = \left. -\, e^{-\,t} \right|_0^\infty = 1 \tag{3.8}$$

- **Relation de récurrence :** $\subset \mathbb{N}$

$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n) = n!\,\Gamma(1) = n! \qquad \square \tag{3.9}$$

- **Factorielle de zéro :** $z = 0$

$$0! = \Gamma(1) = 1 \tag{3.10}$$

- **Domaine d'analyticité :** $\Gamma(z) \quad : \quad \mathrm{Re}(z) > 0$

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)} = \ldots = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\ldots(z+n)} \tag{3.13}$$

où $\Gamma(z+n+1)$ est analytique si $\mathrm{Re}(z) > -(n+1)$ pout tout $n \in \mathbb{N}$

- **Pôles :** $\Gamma(z)$ pour $\mathrm{Re}(z) \leqslant 0$

$$z \in \{0, -1, -2, -3, \ldots\} \tag{3.14}$$

- **Résidu :** $z = -n$ dans (3.14)

$$\underset{z=-n}{\mathrm{Res}}\, \Gamma(z) = \lim_{z \to -n} \frac{\Gamma(1)}{(-n)(-n+1)\ldots(-1)} = \frac{(-1)^n}{n!} \tag{3.15}$$

- **Somme des résidus :**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underset{z=-n}{\mathrm{Res}}\, \Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = e^{-1} = \frac{1}{e} \tag{3.16}$$

- **Domaine de convergence :** $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$

- **Fonction gamma :**

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{z-1}\, dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^{n} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n} t^{z-1}\, dt \tag{3.17}$$

- **Changement de variable :**

$$u = \frac{t}{n} \qquad \text{et} \qquad du = \frac{dt}{n} \tag{3.18}$$

- **Fonction gamma :** intégration par parties

$$\begin{aligned}
\Gamma(z) &= \lim_{n\to\infty} n^{z} \int_0^{1} (1-u)^{n}\, u^{z-1}\, du \\
&= \lim_{n\to\infty} n^{z} \left(\left.\frac{u^{z}(1-u)^{n}}{z}\right|_0^1 + \frac{n}{z} \int_0^{1} (1-u)^{n-1}\, u^{z}\, du \right) \qquad (3.20) \\
&= \lim_{n\to\infty} n^{z}\, \frac{n}{z} \int_0^{1} (1-u)^{n-1}\, u^{z}\, du = \ldots (n-1 \text{ fois}) \ldots \\
&= \lim_{n\to\infty} n^{z}\, \frac{n(n-1)\ldots 1}{z(z+1)\ldots(z+n-1)} \int_0^{1} u^{z+n-1}\, du
\end{aligned}$$

- **Fonction gamma :** intégration

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \lim_{n\to\infty} n^{z} \frac{n(n-1)\dots 1}{z(z+1)\dots(z+n-1)} \int_0^1 u^{\,z+n-1}\,du \\ &= \lim_{n\to\infty} n^{z} \frac{n(n-1)\dots 1}{z(z+1)\dots(z+n)}\; u^{\,z+n}\Big|_0^1 \qquad (3.21) \\ &= \lim_{n\to\infty} n^{z} \frac{n(n-1)\dots 1}{z(z+1)\dots(z+n)}\end{aligned}$$

- **Fonction gamma :** intégration

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{z(z+1)\dots(z+n)}\, n^{z} \qquad (3.22)$$

- **Constante d'Euler-Mascheroni :**

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{n}-\ln(n)\right) \simeq 0.5772156649 \qquad (3.24)$$

- **Fonction gamma :**

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{z(z+1)\ldots(z+n)}\, n^{z} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{z(1+z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{z}{n}\right)}\, e^{\,z\ln\, n} \qquad (3.23) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-\,z\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln\, n\right)}}{z}\, \frac{e^{\,z}\, e^{\,\frac{z}{2}}\ \ldots e^{\,\frac{z}{n}}}{(1+z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{z}{n}\right)} \\ &= \frac{e^{-\,\gamma\, z}}{z} \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{e^{\,z/k}}{1+\frac{z}{k}}\end{aligned}$$

- **Fonction gamma :** développement en produit

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\,\gamma\, z}}{z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{z}{k}\right)^{-\,1} e^{\,z/k} \qquad (3.25)$$

- **Factorielle :**

$$n! = \Gamma\left(n+1\right) = \int_0^{\infty} t^n\, e^{-\,t}\, dt = \int_0^{\infty} e^{\,n\ln t - \,t}\, dt = \int_0^{\infty} f\left(t\right)\, dt \quad (3.26)$$

- **Etude de fonction :** $f\left(t\right)$ avec un extremum en t^*

  - $$f'\left(t^*\right) = \left(\frac{n}{t^*} - 1\right) e^{\,n\ln t^* - \,t^*} = 0 \qquad \text{ainsi} \qquad t^* = n \quad (3.28)$$

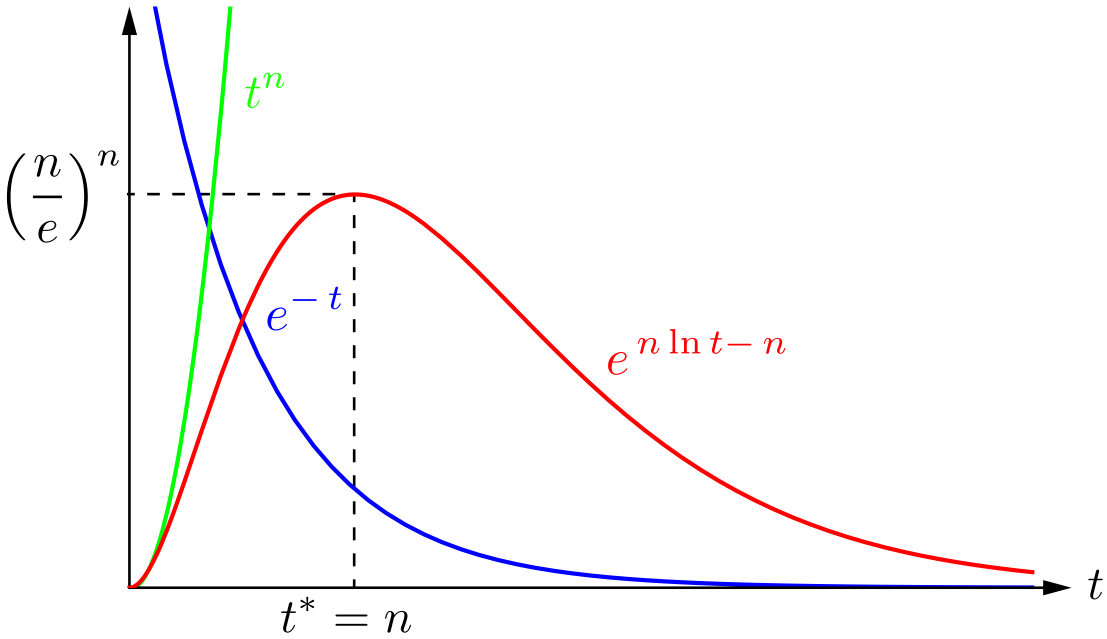
  - $$f\left(t^*\right) = e^{\,n\ln t^* - \,t^*} = e^{\,n\ln n - \,n} = n^n\, e^{-\,n} = \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad (3.29)$$

  - $$f''\left(t^*\right) = \left(-\,\frac{n}{t^{*\,2}} + \left(\frac{n}{t^*} - 1\right)^2\right) f\left(t^*\right) = -\,\frac{1}{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n < 0 \quad (3.30)$$

  - $$\lim_{t\to 0} f\left(t\right) = \lim_{t\to 0} t^n e^{-\,t} = \lim_{t\to 0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\,1\right)^k t^{k+n}}{k!} = 0 \quad (3.31)$$

  - $$\lim_{t\to\infty} f\left(t\right) = \lim_{t\to\infty} \left(t^{-n} e^{\,t}\right)^{-1} = \lim_{t\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k-\,n}}{k!}\right)^{-1} = 0 \quad (3.32)$$

- **Intégrant :** $f(t) = e^{\,n\ln t - t}$: gaussienne déformée (maxwellienne)



- **Ecart type :**

$$\sigma \simeq \sqrt{n} \tag{3.33}$$

- **Changement de variable :** autour de $t^* = n$

$$t = t^* + \sigma\, s = n + \sqrt{n}\, s \quad \text{ainsi} \quad s = \frac{t - n}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad dt = \sqrt{n}\, ds \tag{3.34}$$

- **Factorielle :** développement asymptotique autour d'une gausienne

$$n! = \sqrt{n} \int_{-\sqrt{n}}^{\infty} e^{-n-\sqrt{n}\,s+n\ln\left(n\left(1+\frac{s}{\sqrt{n}}\right)\right)}\,ds \tag{3.36}$$

$$= \sqrt{n} \int_{-\sqrt{n}}^{\infty} e^{n\ln n - n}\, e^{-\sqrt{n}\,s}\, e^{n\ln\left(1+\frac{s}{\sqrt{n}}\right)}\,ds \tag{3.37}$$

$$= \sqrt{n} \int_{-\sqrt{n}}^{\infty} \left(\frac{n}{e}\right)^{n} e^{-n\left(\frac{s}{\sqrt{n}}-\ln\left(1+\frac{s}{\sqrt{n}}\right)\right)}\,ds \tag{3.38}$$

$$= \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^{n} \int_{-\sqrt{n}}^{\infty} e^{-n\left(\frac{s}{\sqrt{n}}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(-\frac{s}{\sqrt{n}}\right)^{k}\right)}\,ds \tag{3.40}$$

$$= \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^{n} \int_{-\sqrt{n}}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\,s^{2} - n\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k}\left(-\frac{s}{\sqrt{n}}\right)^{k}\right)ds$$

$$= \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^{n} \int_{-\sqrt{n}}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} \prod_{k=3}^{\infty} \exp\left(-\frac{n}{k}\left(-\frac{s}{\sqrt{n}}\right)^{k}\right)ds \tag{3.41}$$

$$= \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^{n} \int_{-\sqrt{n}}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} \prod_{k=3}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\left(-\frac{n}{k}\left(-\frac{s}{\sqrt{n}}\right)^{k}\right)^{j} ds \tag{3.43}$$

- **Développement limité :** $s \ll 1$ ainsi $j = 0, 1$ et $k = 3, 4, 5$

$$\prod_{k=3}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(- \frac{n}{k} \left(- \frac{s}{\sqrt{n}} \right)^{k} \right)^{j} = \prod_{k=3}^{5} \left(1 - \frac{n}{k} \left(- \frac{s}{\sqrt{n}} \right)^{k} + \mathcal{O}\left(s^{2k}\right) \right)$$

$$= 1 + \frac{s^3}{3n^{1/2}} - \frac{s^4}{4n} + \frac{s^5}{5n^{3/2}} + \mathcal{O}\left(s^6\right) \tag{3.45}$$

- **Intégrale d'une gaussienne :** $t = -\frac{s^2}{2}$ et $ds = -\frac{dt}{s} = -\frac{dt}{\sqrt{2t}}$

$$\int_{-\sqrt{n}}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}}\, ds \simeq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}}\, ds = 2 \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}}\, ds \tag{3.48}$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{-1/2}\, dt = \sqrt{2}\, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2\pi}$$

- **Factorielle :** terme dominant et termes correctifs

$$n! \simeq \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^{n} \tag{3.49}$$

$$+ \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^{n} \int_{-\sqrt{n}}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} \left(\frac{s^3}{3n^{1/2}} - \frac{s^4}{4n} + \frac{s^5}{5n^{3/2}} + \mathcal{O}\left(s^6\right) \right) ds$$

- **Série de Stirling :** résultat de l'intégrale (3.49)

$$n! = \sqrt{2\pi n}\,\left(\frac{n}{e}\right)^{n}\left(1 + \frac{1}{12\,n} + \frac{1}{288\,n^{2}} - \frac{139}{51840\,n^{3}} - \ldots\right) \tag{3.50}$$

- **Développement asymptotique :** série de Stirling

$$\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\,\left(\frac{n}{e}\right)^{n}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{n^k} \tag{3.51}$$

- **Coefficients :** série de Stirling (3.52)

$$a_k = (2k+1)!!\,b_{2k+1} \qquad \text{où} \qquad b_k = \frac{1}{k+1}\left(b_{k+1} - \sum_{j=2}^{k-1} j\,b_j\,b_{k+1-j}\right)$$

- **Limite des grands nombres :** série de Stirling

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{n^k} \simeq 1 \tag{3.54}$$

- **Formule de Stirling :** approximation : limite des grands nombres n

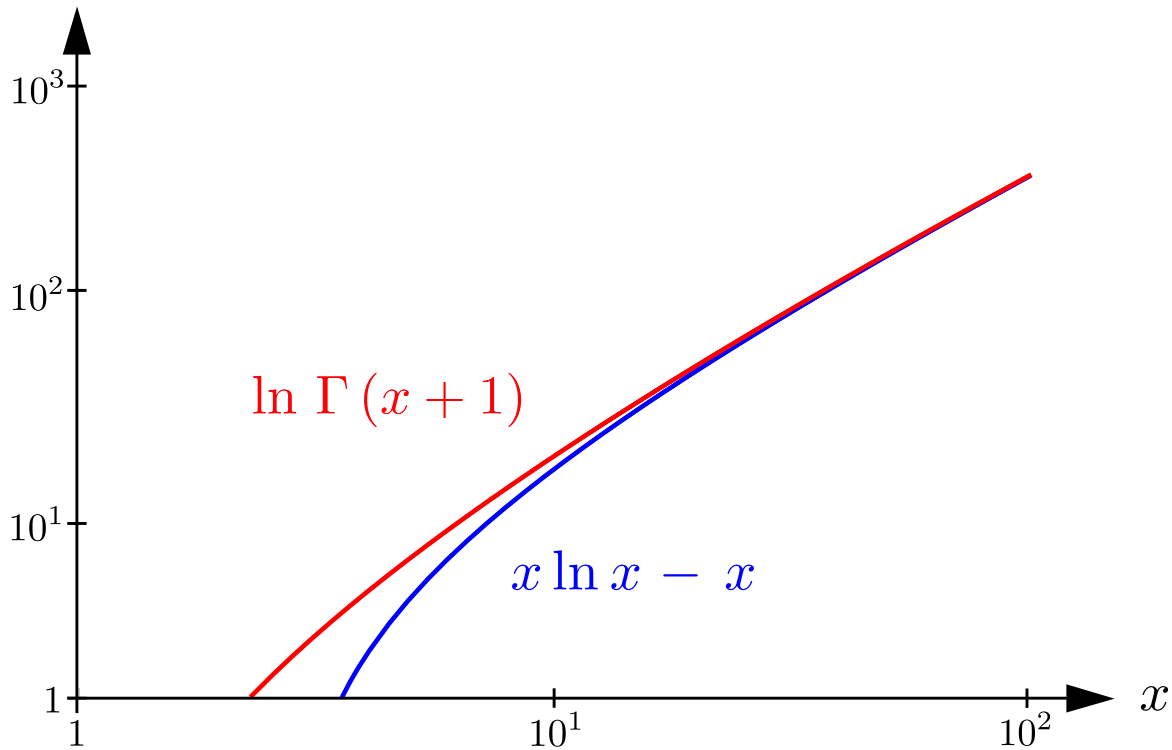
$$n! \simeq \sqrt{2\pi n}\,\left(\frac{n}{e}\right)^{n} \tag{3.55}$$

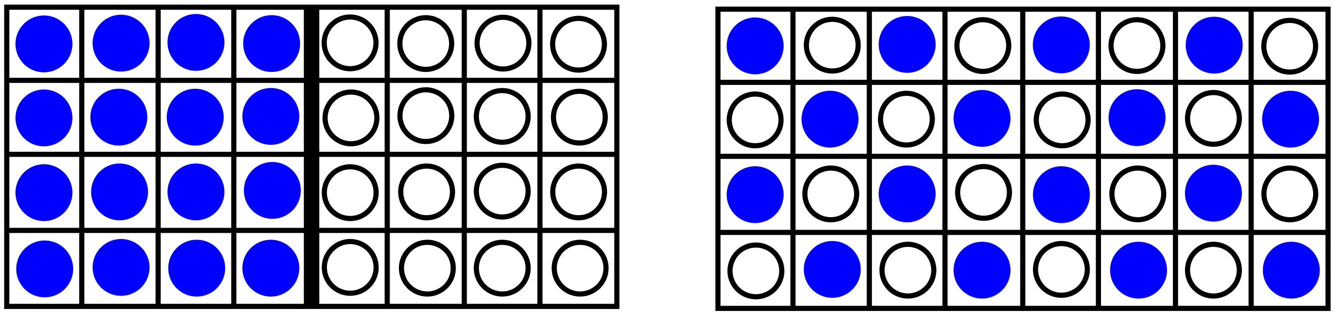
- **Formule logarithmique :** où $\ln\left(\frac{n}{e}\right)^n = n\ln n - n\ln e = n\ln n - n$

$$\ln n! \simeq \ln\left(\frac{n}{e}\right)^n + \ln(2\pi n)^{1/2} = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln(2\pi n) \qquad (3.56)$$

- **Formule de Stirling logarithmique :** limite des grands nombres

$$\ln n! \simeq n\ln n - n \qquad \text{où} \qquad \ln n! = \ln\Gamma(n+1) \qquad (3.59)$$





- **Entropie de mélange :** gaz parfaits 1 et 2 : $N = N_1 + N_2$

$$S\,(N_1, N_2) = -\,N\,k_B \left(\frac{N_1}{N}\,\ln\left(\frac{N_1}{N}\right) + \frac{N_2}{N}\,\ln\left(\frac{N_2}{N}\right)\right) \tag{3.69}$$

- **Entropie de mélange :** (3.70)

$$S\,(N_1, N_2) = k_B\,(N\ln N - \;N - \;N_1\ln N_1 + N_1 - \;N_2\ln N_2 + N_2)$$

- **Entropie statistique :** formule de Stirling logarithmique

$$\boxed{S\,(N_1, N_2) = k_B\ln\left(\frac{N!}{N_1!\,N_2!}\right) = k_B\ln\Omega\,(N_1, N_2)} \tag{3.72}$$

- **Energie atomique moyenne :** niveaux d'énergie E_i avec $p\left(E_i\right) = N_i / N$

$$\langle\, E \,\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{N_i}{N}\, E_i = \sum_{i=1}^{\infty} E_i \, p\left(E_i\right) \tag{3.75}$$

- **Energie atomique moyenne :** limite du continu

$$\langle\, E \,\rangle = \int_0^{\infty} E \, f_E\left(E\right) dE \tag{3.76}$$

- **Densité de probabilité énergétique de Maxwell-Boltzmann :**

$$f_E\left(E\right) = \frac{2\,\beta}{\sqrt{\pi}} \left(\beta E\right)^{1/2} e^{-\,\beta E} \qquad \text{où} \qquad \beta = \frac{1}{k_B\, T} \tag{3.77}$$

- **Condition de normalisation :** probabilités

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f_E\left(E\right) dE &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \left(\beta E\right)^{1/2} e^{-\,\beta E} d\left(\beta E\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, \frac{1}{2}\, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned} \tag{3.81}$$

- **Formule des compléments d'Euler :** démontrée en exercice

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin(\pi z)} \tag{3.11}$$

- **Formule :** évaluée en $z=1/2$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2=\pi \qquad \text{ainsi} \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi} \tag{3.12}$$

- **Condition de normalisation :** probabilités

$$\int_0^\infty f_E(E)\,dE=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=1 \qquad \square \tag{3.82}$$

- **Energie atomique moyenne :** gaz parfait monoatomique

$$\begin{aligned}\langle\, E\,\rangle &= \int_0^\infty E\,f_E(E)\,dE=\frac{2}{\sqrt{\pi}\,\beta}\int_0^\infty(\beta E)^{3/2}\,e^{-\beta E}d(\beta E)\\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}\,\beta}\,\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}\,\beta}\,\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2\,\beta}=\frac{3}{2}\,k_BT\end{aligned} \tag{3.84}$$